ZFC が矛盾した、その後の数学

黒木亮汰（東京大学大学院数理科学研究科）

近頃は LLM によりシステムの脆弱性が発見され、世間を賑わせている。数学の形式的基礎としてよく言及される ZFC についても、その矛盾の発見を期待するのは妥当であろう。

1　ZFC に潜む異常

素朴集合論における Russell のパラドックスは、$R := \{x \mid x \notin x\}$ という循環的・非可述的な構成によって引き起こされる。$x \notin x$ をみたす x を集めて R を構成しようとするとき、今作ろうとしている R 自身もその x として考慮されているのである。ZFC では内包公理が制限され、このパラドックスが回避されたが、一部の循環的定義は依然として可能である。例えば位相空間の部分集合 $S \subseteq X$ の内部 $\operatorname{int} S$ は「S に含まれる開集合全ての和」として構成されるが、今作ろうとしている $\operatorname{int} S$ 自身も S に含まれる開集合である。

このような循環的構成が直ちに矛盾を導くわけではない。しかし、私はそんなオカルトはありえないと思うし、共感してくれる人々がいることを期待している。

2　「正しい数学」

ZFC が矛盾したらどうなるか。矛盾の原因を取り除いた体系を使う人がいたり、矛盾した ZFC と共に生きる人がいたり、とにかく数学を続ける限りはそれぞれが思う「正しい数学」を行うことになるだろう。ZFC 上の証明が単に存在することの価値はなくなるが、証明そのものの価値がなくなるわけではない。我々は ZFC 上の証明を頼りにして、矛盾の原因を避けるように数学を再構成することができるだろう。引き続き ZFC 上の証明を生み出し、鑑賞し、楽しむこともできるだろう。

「正しい数学」が矛盾した後はどうするか。再び矛盾の原因を取り除き、新たな「正しい数学」を生み出す人々もいるだろう。しかし、私はそうするつもりはない。私にとって、「正しい数学」は広く使われているから正しいのではない。矛盾していないから正しいのではない。矛盾してもなおその体系を使い続けたいと思えるか？　私は、そういう体系の上で数学がしたい。

3　今、できること

我々は ZFC の矛盾を待たずとも、ZFC が矛盾した後の数学を行うことができる。我々は今、ZFC という呪縛から逃れることができる。形式的体系は人々の数学を束縛するためにあるのではない。我々は実践を通じて、自身にとっての「正しい数学」を見出すことができる。

「正しい数学」が ZFC 上の数学でない場合、それを展開することは困難を伴う。人々が作り上げてきた数学のうちどの部分が「正しい」のか。どう修正すれば「正しく」なるのか。そういうことを考えながら ZFC を標準とする多数派の数学コミュニティに貢献することは容易ではない。「正しい数学」のコミュニティは小さく、人手不足により発展も遅い。そのような事情により、ZFC に縋らざるを得なかった人々は多いのではないかと思う。

LLM による加速は、この問題を解決しうると考えている。私は今、構成的代数学と呼ばれる「正しい代数学」に取り組んでいる。この分野の研究者は非常に少ないが、既に LLM により研究が加速する兆しは見えており、そのうち人々の関心を集めるような結果も得られるだろう。アカデミアが今後どうなるかは分からないが、私はコミュニティの存続と発展のために今できることを進めようと思う。この狂った世界の中で、本当の「正しさ」を求めて。